UNIV S.M.B.A

Faculté des sciences
Dhar El Mahraz

THERMODYNAMIQUE 1

CHAPITRE 1:

BASES MATHEMATIQUE

exosup.com

ECRIT EN MAIN

TRAVAIL REALISE PAR:

YOUSSEF QOCHRI

exosup.com page facebook

Bases et Rappels mathematique de la thermodynamique :

Déf

Définition :

Soit D une partie de l'espace vectoriel des corps réel $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ $\dim \mathbb{R} = 1 \Leftrightarrow$ une seule variable.

f étant une fonction dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \ln x \qquad D =]0, +\infty[$$

$$D =]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$$

- D une partie de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\Leftrightarrow$ 2 variables indépendants f. $D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

ex

exemple :

$$f(x, y) = x^2 + axy + b \ln y$$

a et b = cte

- Si $D \subset \mathbb{R}^2$

$\dim \mathbb{R}^n = n \Leftrightarrow$ n variables indépendantes

$$(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n)$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_0, \ldots, x_n)$$

Qachi youssef

Look out !!

Remarque $f(x,y) = x + \ln y$

- Si $f(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow (x,y)$ independants
- Si $f(x,y) = 0$ $\begin{cases} x = -\ln y \\ \text{ou} \\ y = e^{-x} \end{cases}$

(x,y) sont dépendant $\Leftrightarrow f(x,y)$ une fonction à une seule variable.

- Si $f(x_1 \dots x_n) = 0$ / On peut aussi

$x_i = g(x_1, \dots x_n)$

$(n-1)$ variable indépendants

Dérivée partielles :

Déf : On dit que f est une fonction dérivable en pnt x_0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe $= f(x_0)$

Notation : $f'(x_0) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$

C'est facile !!!

Exemple : $f(x) = x^2$ $\quad \dfrac{df}{dx} = 2x$

Y. Q

exosup.com page facebook

Dérivée droite :

On suppose que f est infiniment dérivable ($n = \infty$)

- $\frac{df}{dx}$ = dérivée d'ordre 1.
- $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$ dérivée seconde [d'ordre 2]
- $\frac{d^nf}{dx^n}$ = dérivée d'ordre n.

$\Rightarrow$ f n fois dérivable $\Leftrightarrow$ f de classe C^n.

ex: $f(x) = \ln x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \; ; \; \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-1}{x^2} \; ; \; \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

Cas de deux variables $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$:

Soit la fonction $f(x,y)$; $y = y_0 = cte$

Alors $f(x,y_0)$ = une variable x

Si $x_0 = cte \Rightarrow$ Alors $f(x_0, y)$ = seule variable y

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x = x_0 = cte}$ = dérivée partielles de f par rapport à y

« the core »

Y. Q

Notation : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=y_0=cte}$

$\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow$ dérivée partielle d'ordre 1

$$\boxed{f(x,y) = axy + b\ln y + 3x^2}$$

$a, b = cte$ et ∂ = "d'rond"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay + 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax + \frac{b}{y}$$

On suppose que $f \in C^\infty$

* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$: ordre 2 par rapport à x

— On appelle dérivée mixte ou croisée la quantité suivante :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(ax) = a$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ay) = a$

Lemme de SCHWARTZ

Si $f \in C^\infty$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Remarque : $(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$; $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Y.Q

exosup.com page facebook

Différentielle

Soit $f(x)$ dérivable $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$:

existe

On pose $x - x_0 = dx \longrightarrow 0$

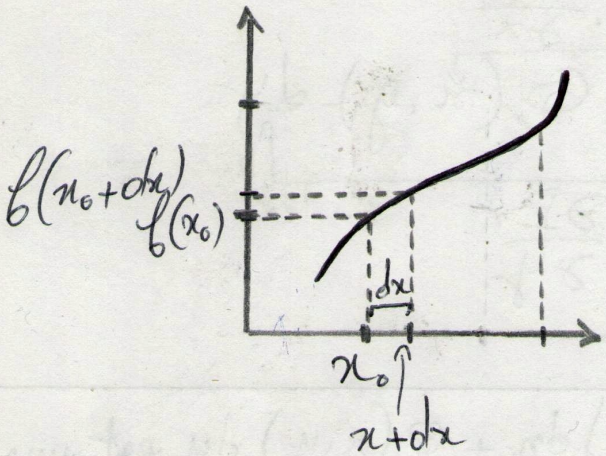
$x - x_0 + dx$ où $dx \longrightarrow 0$

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

Définition :

- On appelle différentielle d'une fonction $f(x)$ la quantité suivante :

$$\forall x \in D \subset \mathbb{R} : \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$



$\dfrac{df}{dx}\,dx = df \Rightarrow$ la dérivée totale de f

Cas de deux variables où $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$:

Déf : On appelle différentielle ou dérivée totale (ou exacte) d'une fonction $f(x,y)$, l'application linéaire suivante : $df(U_1, U_2) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) U_1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) U_2$

Y.Q

Remarque :

linéaire

$f(x) = ax + b$ droite linéaire

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$

Lemme de Schwartz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\left.\begin{array}{l} * \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ * \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\partial f = \underbrace{P(x,y)}_{\frac{\partial P}{\partial y}} dx + \overbrace{Q(x,y)}^{\frac{\partial Q}{\partial x}} dy$$

Critère :

$$\boxed{\begin{array}{l} \partial f = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \text{ est une DTE} \\ (\partial f = df) \text{ si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{array}}$$

* Si le critère est bien vérifié, On peut déterminer $f(x,y)$
* Si le critère n'est pas vérifié $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$\Longleftrightarrow f$ est non DTE $(\partial f \neq df)$

$\Rightarrow$ On ne peut jamais déterminer la fonction $f(x,y)$

Y. Q

Exemple 1:

* Soit la forme différentielle $\partial f = x\,dx + y\,dy$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont indépendants} \\ \vec{V_1} \text{ et } \vec{V_2},\ \alpha\vec{V_1} + \beta\vec{V_2} = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0 \\ f \text{ est une } \textbf{D.T.E} \end{cases}$$

• On peut trouver $f(x,y)$

$$\partial f = df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=cte} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=cte} dy = x\,dx + y\,dy$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \quad \text{avec } y = cte$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y \quad \text{avec } x = cte$$

$$\partial f(x,y) = x\,dx$$

$$\int df(x,y) = f(x,y) = \int x \cdot dx + C(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

Calcul $C(y)$: fonction seulement de la variable (x n'existe pas dans $C(y)$)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y = \frac{dC(y)}{dy}$$

$$dC(y) = y \cdot dy$$

$$\int dC(y) = C(y) = \int y \cdot dy + c \Longrightarrow$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c}$$

Vérification:

$$df = x\,dx + y\,dy = \partial f$$

Y. Q

Exemple 2:

$$\partial f = x\,dx + x\,dy$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad 1 \neq 0$$

Donc f est non DTE

Supposons existe une fonction $f(x,y)$

$$\partial f = df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_y = x$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_x = x$$

$$\int df(x,y) = \int x\,dx + C(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$\frac{d(y)}{dy} = x$$ impossible $\Rightarrow$ on ne peut pas déterminer $f(x,y)$

$$\Longrightarrow \partial f \neq dy$$

Intégration d'une forme différentielle:

Soit dans le plan (x,y) deux points, une point initial $A(x_A, y_A)$ et une pnt final $B(x_B, y_B)$.

$$f(x,y) = \alpha x + \beta y \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$\alpha_n x_n$: Application linéaire

Cas particulière: Si $f(x,y) = x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$dx = 1 \times U_1 + 0 \times U_2 = U_1 = dx$$

Si $f(x,y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

Y. Q

Théorème : la dérivée totale de $f(x,y)$

C'est $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$

Remarque : Si $f(x,y,z)$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

$$= f(x+dx\ ,\ y+dy\ ,\ z+dz)$$

df = Variable élémentaire de f

C'est une DTE

Ex : $f(x,y,z) = x + 3y^2 + xyz$

$$df = (1+yz)\,dx + (6y+xz)\,dx + xy\,dz$$

On pose $\begin{cases} P(x,y,z) = 1+yz \\ Q(x,y,z) = 6y+xz \\ R(x,y,z) = x.y \end{cases}$

$$df = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Forme differentielle :

Supposons donné trois fonction quelconques de class C^∞ telles que $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ et $R(x,y,z)$.

- P, Q et R ne sont pas connues.

On considère un problème inverse, soit l'expression suivante :

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Y. Q

exosup.com page facebook

* Est-ce que cette expression représente une DTE ?
* Est-il possible de trouver une fonction $f(x,y,z)$ telle que $df = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$

* Oui si $\begin{cases} P(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \text{et } R(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$ (1)

Cependant, dans la plupart des cas l'expression (1) n'est pas toujours vérifiée.

$\boxed{\text{On ne peut pas déterminer } f(x,y,z)}$

<u>Définition</u>

On appelle forme différentielle notée δf (delta=δ) l'expression suivante $\delta f = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$

<u>Appelé forme différentielle de degré</u>

$\boxed{1^\circ}$

Y.Q

Problème :

Quand est $\delta f = df$?

Soit $f(x,y)$ une fonction à deux variables de class C^∞, et soient $P(x,y)$ et $Q(x,y) \in C^\infty$

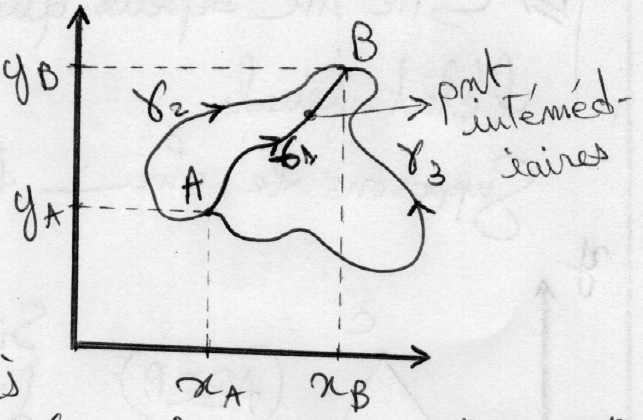
On considère la forme différentielle

$$\delta f = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Si f est une DTE ; Alors :

$$\delta f = df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = P\,dx + Q\,dy$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$



Supposons entre A et B existent 3 chemins Orientés de A à B notés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, les points entre A et B s'appelent points intermédiaires.

Soit $\delta f(x,y)$ une forme différentielle

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \delta f = \int_A^B \delta f(\gamma_1)$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \delta f = \int_A^B \delta f(\gamma_2)$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \delta f = \int_A^B \delta f(\gamma_3)$$

Y, Q

* Si f est une DTE ($\delta f = df$) Alors :

$$I_1 = \int_A^B df = f(B) - f(A) = \Delta f$$

$$I_2 = \int_A^B df = f(B) - f(A) = \Delta f$$

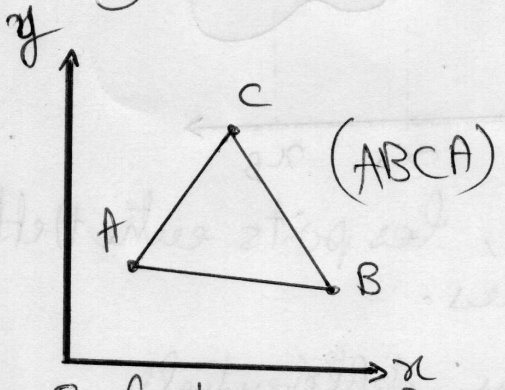
$$I_3 = \int_A^B df = f(B) - f(A) = \Delta f$$

$$\boxed{I_1 = I_2 = I_3}$$

On dit que l'intégrale d'une forme DTE ne dépend pas du chemin suivi (ne dépend pas des pnts intermédiaires)

$\Rightarrow$ Elle ne dépend que de l'état initiale et de l'état finale.

Supposons le chemin fermé (appelé cycle)



(ABCA)

Si f est une DTE, Alors :

$$\oint df = \int_B^A df = f(A) - f(A) = 0$$

$$\oint df = 0$$

Si f est une DTE ($\delta f \neq df$)

On montre que $I_1 = \int_{\gamma_1} \delta f = \int_A^B \delta f = f\Big]_A^B (\gamma_1)$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \delta f = f\Big]_A^B (\gamma_2)$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \delta f = \int_A^B \delta f(\gamma_3) = f\Big]_A^B (\gamma_3)$$

On trouve $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \Rightarrow$ Intégrale depend du chemin suivi (dépend des pnts intermédiaires)

$$\oint \delta f = f\Big]_A^B \neq 0$$

Y. Q

F_ Fonction implicite :

Un système divariant est un système à deux variables.

Soit $f(x,y,z)$ une fonction à 3 variables possibles

$f(x,y,z)=0 \Longleftrightarrow \exists$ **2 variables** indépendantes.

Il y a 3 couples de variables indépendants.

$$(x,y) \Longrightarrow 3 = 3(x,y)$$

fonction d'état

variable d'état

$(x,z) \Longleftrightarrow y = y(x,z)$ = fonction d'état.

$(y,z) \Longleftrightarrow x = x(y,z)$ = fonction d'état.

Exemple :

$$f(x,y,z) = xy + z \text{ où } (x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$$

si $f(x,y,z)=0 \Longrightarrow$ 2 variables independantes

$(x,y) \Longleftrightarrow z = -xy = z(x,y)$

Ou bien

$(x,z) \Longleftrightarrow y = \dfrac{-z}{x} = y(x,z)$

$(y,z) \Longleftrightarrow x = \dfrac{-z}{y} = x(y,z)$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_y = \frac{-(\partial f/\partial z)}{(\partial f/\partial x)} = \frac{1}{\left(-\dfrac{dz}{dx}\right)_y}$$

Y.Q

$x = cte \Longleftrightarrow dx = 0$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \cdot \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

$$\frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = -1$$

Identité de Reech

exosup.com

première chapitre terminée

by Youssef Qochri

exosup.com page facebook

POUR OBTENIR TOUTS LES COURS ET LES TDS S1-S11 DE LA FACULTE DES

SCIENCES DHAR ELMEHRAZ

VOUS ALLEZ LES TROUVER DANS LE SITE WEB CI-DESSOUS :

Jiovani20braak.wix.com/fsdmpro